

Computermodell der turbulenten Dispersion von Teilchen

K. NÁRAI, Centralinstitut für Physik der Atmosphäre, Budapest

Részecskék turbulens szóródásának számítógépes modellje. A szerző matematikai modell segítségével határozta meg az ipari kéményekből kibocsátott részecskék ülepedésének a kémény környezetében várható eloszlását. A modell megszerkesztésekor a szerző a folytonos pontforrásból származó, gáznemű szennyező anyagra érvényes általánosított diffúziós egyenletből indul ki, s az egyenletet kiegészíti egy — a részecskék gravitációs ülepedését kifejező — tényezővel. Az elméleti számítások megbízhatóságát a forrás környezetében elhelyezett 50 mérőponton, négy hónapon át végzett mérésekkel igazolja.

*

Модель турбулентного рассеяния частиц для ЭВМ. С использованием математической модели было определено ожидаемое распределение осаждения частиц, испускаемых промышленными дымовыми в окружности последней. При разработке модели автор исходил из обобщенного уравнения диффузии, действительного для загрязняющего газообразного вещества, происходящего из непрерывного точечного источника, причем уравнение дополнено фактором, выражающим гравитационное осаждение частиц. Достоверность теоретических вычислений подтверждается результатами измерений, проведенных за 4 месяца в 50 пунктах наблюдений, размещенных в окружности источника.

*

1. Einleitung

Eine der wichtigsten Aufgaben der meteorologischen Tätigkeit unserer Tage ist die Bestimmung des zu erwartenden Masses, der Häufigkeit der bodennahen Immission. Die Bestimmung der zu erwartenden bodennahen Immission in der Umgebung einer — gasartige Verunreinigungsstoffe fortlaufend emittierenden hohen Punktquelle kann in erster Annäherung als gelöst erachtet werden. In der gegenwärtigen Arbeit wird die zur Bestimmung der Sedimentation der aus hoher Punktquelle und aus Flächenquelle stammenden Teilchen geeignete mathematische Gleichung beschrieben.

2. Übersicht der wichtigsten Resultate der Untersuchung der gasartigen Verunreinigungsstoffe

2.1 *Bestimmung der Konzentration des aus einer hohen Punktquelle stammenden gasartigen Verunreinigungsstoffe.* Zur Bestimmung der bodennahen windrichtungsentlangten Konzentration $I(x, 0, 0)$ [g/m^3] gasartiger Verunreinigungsstoffe, die aus einer h [m] hohen kontinuierlich wirkenden Punktquelle stammen, dient die folgende Gleichung:

$$I(x, 0, 0) = \frac{E}{\pi \sigma_y \sigma_z \bar{u}_h} \exp \left(- \frac{H^2}{2\sigma_z^2} \right) \quad (1)$$

wo

E [g/sec] — Mass der Emission,

σ_y [m] und σ_z [m] — die auf die Windrichtung der turbulenten Streuung senkrechte und vertikale Komponente,

\bar{u}_h [m/sec] — durchschnittliche Windgeschwindigkeit in der Höhe des Schornsteins,

H [m] – effektive Schornsteinhöhe.

Die Häufigkeitsanalyse der Windrichtung, Windgeschwindigkeit, des Windprofils und des Masses der Stabilität ermöglicht die Untersuchung der Häufigkeit der in der Umgebung des Verunreinigungsquellen entstehenden Konzentrationen. Da die statistische Auswertung der Windrichtungen im allgemeinen nicht auf Grade, sondern bloss auf 16 Windrichtungen ausgeführt sind, wird das zur Realität am nächsten liegende Resultat bei einer auf längere Zeit bezüglichen Untersuchung durch die sogenannte wahrscheinliche Konzentration gegeben. In der Umgebung einer hohen Punktquelle dient zur Bestimmung der bodennahen (wahrscheinlichsten) Konzentration des gasartigen Verunreinigungsstoffes die folgende Arbeitsformel [2]:

$$\bar{I}(x, 0, 0) = \frac{16E'}{\pi^{1,5} 2^{0,5} \sigma_z \bar{u}_{h_0} (h/h_0)^{px}} \exp\left(-\frac{H^2}{2\sigma_z^2}\right) \quad (2)$$

wo $\bar{u}_h = \bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p$ – die *Sutton'sche* Windprofilgleichung,

\bar{u}_{h_0} [m/sec] – der Durchschnittswert der in der Bodennähe gemessenen Windgeschwindigkeit,

h_0 [m] – Höhe der bodennahen Windmessung,

p [–] – Exponent der Windprofilgleichung, der von der Windrichtung, der Windgeschwindigkeit und der Stabilität abhängt.

2.2 *Bestimmung der Konzentration der aus Flächenquelle stammenden gasartigen Verunreinigungsstoffe.* Die auf eine Flächenquelle erfolgende Verallgemeinerung der zur Bestimmung der Konzentration der aus hoher Punktquelle stammenden gasartigen Verunreinigungsstoffe dienenden Gleichung (1) kann durch die mit den Parametern σ_{y0} und σ_{z0} erfolgenden additiven Steigerung diese Parameter ziehen auch die initiellen Verdünnungsumstände in Betracht) der turbulenten Diffusionskoeffizienten σ_y und σ_z der Punktquelle erhalten werden, d.h.:

$$I(x, 0, 0) = \frac{E}{\pi(\sigma_y + \sigma_{y0}) (\sigma_z + \sigma_{z0}) \bar{u}_h} \exp\left[-\frac{H^2}{2(\sigma_z + \sigma_{z0})^2}\right] \quad (3)$$

3. Rechenmaschinenmode II der turbulenten Teilchenstreuung

3.1 *Bestimmung der Sedimentation von aus hoher Punktquelle stammenden Teilchen.* Die Streuung der Teilchen geht nach dem turbulenten Diffusionsmodell von *Sutton* (1953) vor sich, und gleichzeitig fallen die Teilchen mit vertikaler Geschwindigkeit abwärts. Demnach wird die auf das gasartige Verunreinigungsmaterial gültige turbulente Diffusionsgleichung mit einem auch die gravitationelle Sedimentation der Teilchen in Betracht ziehenden Glied ergänzt.

Die aus der Verunreinigungsquelle emittierten Teilchen verlagern sich nach Erreichung der effektiven Schornsteinhöhe in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit und in der Richtung des dort herrschenden durchschnittlichen Windes, und fallen vertikal praktisch mit einer ständigen Fallgeschwindigkeit von v_g [m/sec]. Mit der Anwendung der *Sutton'schen* Windprofilgleichung kann der Weg der sich in der Achse der Aerosolwolke befindlichen Teilchen mit dem folgenden Differentialgleichungssystem angegeben werden [5]:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{u}_{h_0} \left(\frac{z}{h_0} \right)^p \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_g$$

wo t die Transportzeit, Verlagerungszeit bedeutet. Mit der Lösung des Diffe-

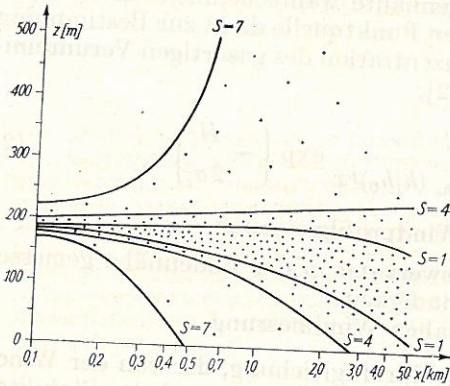


Abb. 1: Turbulente Streuung der Teilchen im Falle von verschiedener Temperaturstratifikation.

rentialgleichungssystem (4) im Falle der Initialbedingungen $t = 0, z = H, x = 0,$

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = v_g \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \bar{u}_H \quad \text{kann die folgende}$$

Gleichung für den Verlagerungsweg erhalten werden

$$H(x) = H \left[1 - (p+1) \frac{v_g x}{H \bar{u}_{h_0} (H/h_0)^p} \right]^{\frac{1}{1+p}} \quad (5)$$

Die mit dem Durchschnittswind transportierten und mit der Gravitationsgeschwindigkeit fallenden Teilchen werden – ähnlich der gasartigen Verunreinigungsstoffen von den turbulenten Wirbeln diffundiert. In Kenntnis der auf die Windrichtung senkrechten σ_y und vertikalen σ_z Koeffizienten der turbulenten Streuung kann die Fortpflanzung der aus den industriellen Schornsteinen stammenden Teilchen bestimmt werden.

In der Abb. 1. ist es ersichtlich, in welchen Streifen die aus der 150 m hohen kontinuierlichen Punktquelle emittierten Teilchen im Falle von den Werten $\bar{u}_{h_0} = 2,5$ m/sec, $h_0 = 16$ m und $v_g = 0,1$ m/sec sich bei verschiedenen Temperaturstratifikationen zerstreuen. Im kleinsten Streifen streuen sich die Teilchen im Falle der Inversion ($S = 1$), bei isothermer Stratifikation ($S = 4$) wird der Streifen etwas breiter, und bei labiler Stratifikation wächst das Mass der turbulenten Streuung stark an.

Im Falle von Fallgeschwindigkeiten unter 1 cm/sec, im allgemeinen bei Teilchengrößen unter 10μ kann der Effekt der Sedimentation vernachlässigt werden. Auf solche kleine Teilchen ist die auf die gasartigen Verunreinigungsmaterien sich beziehende turbulente Diffusionsgleichung in Gültigkeit. Bei Teilchen über 10μ kann der Effekt der Sedimentation nicht ausser Acht gelassen werden.

Die bodennahe windrichtungsentlange Konzentration $I_p(x, 0, 0)$ [g/m^3] der aus hoher Punktquelle stammenden Teilchen erhält man, wenn in die Gleichung (1) bezüglich der gasartigen Verunreinigungsmaterien anstatt der konstanten Höhe H der Ausdruck

$$H(x) = H \left[1 - (p+1) \frac{v_g x}{H \bar{u}_{h_0} (H/h_0)^p} \right]^{\frac{1}{p+1}}$$

eingesetzt wird, und da das Teilchen sich in der Schicht zwischen der effektiven Schornsteinhöhe und dem Boden sich bewegt, nimmt man die durchschnittliche Windgeschwindigkeit der Schicht zwischen H und h_0 :

$$I_p(x, 0, 0) = \frac{E_p(x)}{\pi \sigma_y \sigma_z \left[\frac{1}{H-h_0} \int_{h_0}^H \bar{u}_{h_0} \left(\frac{z}{h_0} \right)^p dz \right]} \exp \left[-\frac{H^2(x)}{2\sigma_z^2} \right] \quad (6)$$

wo $E_p(x)$ die Abnahme der Initialemission in der Funktion der Entfernung ausdrückt.

Bei der Ableitung der Gleichung (1) wurde der Boden als vollkommen reflektierende Fläche angenommen. Im Falle von Teilchen kommt diese Voraussetzung nicht zur Erfüllung, da die den Boden erreichenden Teilchen sich auf die Bodenoberfläche absetzen. Das Ausgehen der in der bodennahen Luftschicht infolge der Sedimentation sich fortpflanzenden Aerosolwolke wurde das erste Mal von Chamberlain (1953) in Betracht genommen, so dass er die originale Emission der E Quelle mit der Emission der tatsächlich entleerten Emission der Quelle $E(x)$ ersetzte. $E_p(x)$ wird vom folgenden Ausdruck ergeben [4]:

$$E_p(x) = E_p(0) \left\{ \exp \int_0^x \frac{\exp \left[-\frac{H^2(x)}{2\sigma_z^2} \right]}{\sigma_z} dx \right\}^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_g}{H}} \frac{1}{H-h_0} \int_{h_0}^H \bar{u}_{h_0} \left(\frac{z}{h_0} \right)^p dz \quad (7)$$

$E_p(0)$ [g/sec] ist die initiale Teilchenemission beim Schornsteinhals.

$E_p(x)/E_p(0)$ ist der Korrektionskoeffizient für die Sedimentation auf dem Boden. Der Wert von $E_p(x)/E_p(0)$ fällt zwischen 0 und 1. In einer geringen Entfernung von der Quelle, wo das Mass der Sedimentation gering ist, ist der Wert nahe zu 1; mit dem Anstieg der Entfernung von der Quelle nimmt dieser Wert

TABELLE I

Errechnete Werte von a und b zu σ_z (*Die graphische Angabe kann nicht verwendet werden)

$\Delta T/\Delta z$ [$^{\circ}C/100$ m] in dem unteren 300 m Luftschicht	Stabilitäts- kategorie	$0,5 \leq x \leq 10$ km		$x > 10$ km	
		a	b	a	b
$> 1,50$	1	0,128	0,657	2,59	0,316
1,01 — 1,50	2	0,208	0,635	2,84	0,346
0,51 — 1,00	3	0,204	0,669	1,85	0,423
0,01 — 0,50	4	0,231	0,694	2,44	0,438
—0,50 — 0,00	5	0,150	0,802	0,790	0,621
—1,00 — —0,51	6	0,00508	1,422	*	*
$< -1,00$	7	0,0000627	2,303	*	*

in der Funktion der Stabilität, der Schornsteinhöhe, der Fallgeschwindigkeit und der Windgeschwindigkeit ab.

Der Streukoeffizient σ_z hängt von der Quellenentfernung und dem Masse der Stabilität ab, sein Wert wird aus einem Graphikon bestimmt [2]. In der Formel (7) muss zur Ausführung der nach der Entfernung x erfolgenden Integrierung der vertikale Koeffizient der turbulenten Streuung als analytische Funktion von x aufgeschrieben werden. σ_z kann mit guter Annäherung im Bereich von $0,5 \leq x \leq 100$ km in der Form der Funktion ax^b aufgeschrieben werden. Die Werte von a und b sind in der *Tabelle I* ersichtlich.

Die in Grammen ausgedrückte Quantität der innerhalb einer Stunde auf eine Bodenoberfläche von 1 m^2 sich ablagernden Teilchen wird vom Produkte der bodennahen Konzentration und der Fallgeschwindigkeit ergeben, d.h.:

$$\omega(x,0) = \frac{3600 E_p(x) v_g}{\pi \sigma_y \sigma_z \left[\frac{1}{H-h_0} \int_{h_0}^H \bar{u}_{h_0} \left(\frac{z}{h_0} \right)^p dz \right]} \exp \left[-\frac{H^2(x)}{2 \sigma_z^2} \right] \quad (8)$$

wo 3600 die Zahl der Sekunden einer Stunde ist.

Auf Grund der gesamten monatlichen Stundenhäufigkeiten der Windrichtung, der Windgeschwindigkeit, des Windprofils und des Stabilitätsmasses kann die Quantität aus der von der Quelle in verschiedenen Richtungen und Entfernungen auf eine gegebene Bodenfläche innerhalb eines Monats sich ablagernden Teilchen erhalten werden.

3.2 Bestimmung der Sedimentation der aus einer Flächenquelle stammenden Teilchen. Bei der Bestimmung der Ablagerung der aus einer Flächenquelle stammenden Teilchen wird aus der Gleichung (3) ausgegangen: diese wird mit dem auch die gravitationale Sedimentation der Teilchen in Betracht ziehenden Glied ergänzt.

Bei einer Flächenquelle wird das Problem, mit der hohen Punktquelle verglichen, insofern vereinfacht, dass die aus den niedrigen Schornsteinen der Flächenquelle emittierten Teilchen sich in horizontaler Richtung mit fast identischer Geschwindigkeit verlagern. Ein annähernd genaues Ergebnis erhält man, wenn mit der in der Schornsteinhöhe bestehender Windgeschwindigkeit gerechnet wird.

Die bodennahe windrichtungsentlange Konzentration $I_p(x, 0,0)$ des aus der flächenquelle stammenden Teilchens erhält man durch die Ersetzung der in der Gleichung (3) figurierenden Konstanten H durch den Ausdruck

$$H(x) = H - \frac{v_g x}{\bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p} \quad (9)$$

Das Produkt der Teilchenkonzentration und der Fallgeschwindigkeit ergibt (in Gramms) die Quantität der auf einer Bodenoberfläche von 1 m^2 innerhalb einer Stunde sedimentierenden Teilchen:

$$\omega(x, 0) = \frac{3600 E_p(x) v_g}{\pi (\sigma_y + \sigma_{y0}) (\sigma_z + \sigma_{z0}) \bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p} \exp \left\{ -\frac{\left[H - \frac{v_g x}{\bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p} \right]^2}{2(\sigma_z + \sigma_{z0})^2} \right\} \quad (10)$$

$$E_p(x) = E_p(0) \left\{ \exp \int_0^x \frac{\exp \left[- \frac{\left(H - \frac{v_g x}{\bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p} \right)^2}{2(\sigma_z + \sigma_{z_0})^2} \right]}{\sigma_z + \sigma_{z_0}} dx \right\}^{-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_g}{\bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p}} \quad (11)$$

4. Zusammenfassung der Resultate

Zur Bestätigung der Theorie wurden in der Umgebung einer Zementfabrik Messungen und Errechnungen ausgeführt.

In dem Umkreise mit einem Radius von 10 km um die Fabrik wurden in verschiedenen Richtungen und Entfernungen an 50 Punkten ein halbes Jahr hindurch monatlich Sedimentationsmessungen vorgenommen. Die Messpunkte sind in der *Abb. 2* ersichtlich. Die Mess-Station bestand aus einem in der Höhe von 1,5 m angebrachten, 19 cm hohen, aus Gussglas hergestelltem Absetzgefäßes mit einem Durchmesser von 15 cm. Die Gefäße wurden monatlich eingesammelt, und die Muster in Laboratorien ausgewertet. Aus den Mustern wurden zunächst die fremden Verunreinigungsstoffe ausgefiltert, dann mit gravimetrischer Auswertung die wasserunlösliche Fraktion bestimmt. Die Quantität der sedimentierten Teilchen wurde in g/m² Monat-Einheiten angegeben.

In der Messperiode wurden die monatlichen Sedimentationswerte auch mit Errechnung ermittelt. Die zahlreichen niedrigen Verunreinigungsquellen der Zementfabrik können einzeln nicht in Betrachtung gezogen werden, sondern sie sind als Flächenquellen zu erachten. Da die Windbeobachtungen nicht nach Graden, sondern auf 16 Windrichtungen vorgenommen worden sind, haben wir die sogenannte wahrscheinlichste Konzentration eingeführt.

Unsere Arbeitsformel war die folgende:

$$\omega(x, 0) = \frac{3600 \cdot 16 E_p(0) v_g}{\pi^{1,5} 2^{0,5} (\sigma_z + \sigma_{z_0}) \bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p x} \exp \left\{ - \frac{\left[H - \frac{v_g x}{\bar{u}_{h_0} (h/h_0)^p} \right]^2}{2(\sigma_z + \sigma_{z_0})^2} \right\} \quad (12)$$

Das Glied des Ausgangs wurde vernachlässigt, da es hier das Resultat nicht bedeutend beeinflusst.

Von der Zementfabrik werden Teilchen unter 100 μ emittiert. Die Errechnungen wurden auf drei Massbereiche ausgeführt. Die Aufteilung auf drei Massbereiche, und die dazu gehörigen Fallgeschwindigkeitswerte sind in der *Tabelle II* ersichtlich [1].

TABELLE II.

Werte der Gravitationsfallgeschwindigkeit, auf Massbereiche aufgeteilt

Mass des Teilchens [μ]	10—20	21—50	51—100
Fallgeschwindigkeit [m/sec]	0,01	0,07	0,3

Auf Grund der gesamten monatlichen Stundenhäufigkeitswerten der in der Arbeitsformel angegebenen meteorologischen Faktoren wurden in verschiedenen Richtungen und Entfernungen von der Fabrik die Quantität der innerhalb eines Monats auf einer Bodenfläche von 1 m² sedimentierten Teilchen bestimmt.

Die im 10 km – Umkreise der untersuchten Zementfabrik innerhalb von 4 Monaten gemessene und errechnete durchschnittliche monatliche Teilchensedimentation ist in der *Abb. 2* angeführt. Aus dieser *Abbildung* ist ersichtlich,

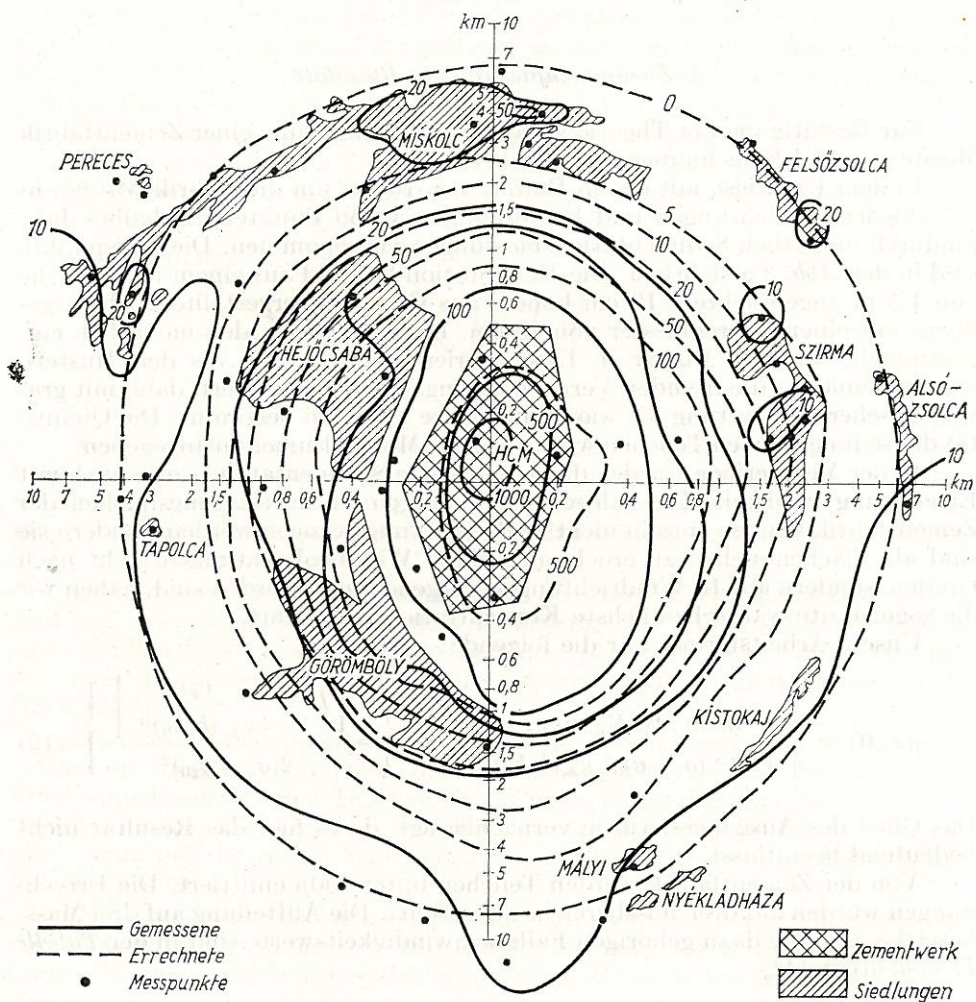


Abb. 2: Durchschnittliches Monatsmass [g/m² Monat] der errechneten und gemessenen Sedimentation.

dass im Umkreise von 1,5 km der Fabrik, wo die Verunreinigungswirkung der Zementfabrik bestimmend ist, die Errechnungen und Messungen eine gute Übereinstimmung aufweisen. Ausserhalb dieses 1,5 km-Umkreises wird die verunreinigende Wirkung der Zementfabrik mit der Zunahme der Entfernung immer kleiner, es kommt die Wirkung der lokalen und anderen industriellen Quellen zur Geltung, und deshalb sind die errechneten und gemessenen Werte verschieden.

Das Streuungsdiagramm des Zusammenhanges zwischen den gemessenen und errechneten Werten zeigt die *Abb. 3*. Im Falle einer errechneten Teilchensedimentation unter 10 g/m^2 wird die Abweichung zwischen den gemessenen und errechneten Werten dadurch hervorgerufen, dass die kleine verunreinigende

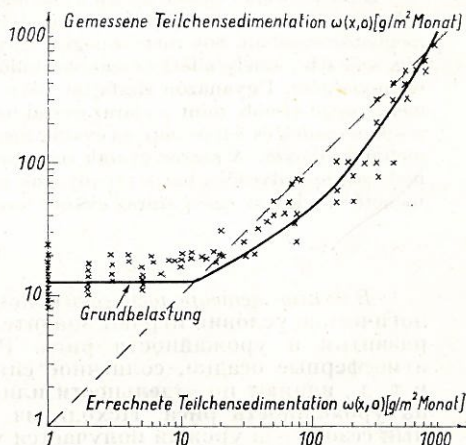


Abb. 3: Zusammenhang zwischen der errechneten und gemessenen Teilchensedimentation.

Auswirkung der Zementfabrik sich auf die durchschnittliche Grundbelastungshöhe des agrar- und industriellen Gebietes abgelagert. Bei errechneter Teilchensedimentation über 10 g/m^2 Monat kann die Übereinstimmung der errechneten und der gemessenen Werte als zufriedenstellend erachtet werden: im allgemeinen genommen ist die errechnete Teilchensedimentation grösser als die gemessene.

Danksagung

Die Verfasserin erachtet es als ihre angenehme Pflicht, dem Herrn Gruppenleiter *T. Cziczó*, und den Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe ihren aufrichtigen Dank für die Ausführung der Staubsedimentationsmessungen zum Ausdruck zu bringen.

LITERATUR

- [1] *Stern, A.* (1968): Air Pollution, Vol. I. pp. 51.
- [2] *Szepesi, D.* (1967): Légszennyező anyagok turbulens diffúziójának meteorológiai feltételei Magyarországon. (Meteorologische Bedingungen der turbulenten Diffusion von Luftverunreinigungsmaterialien in Ungarn) Orsz. Met. Int. Hivatalos Kiadványai XXXII. Band.
- [3] *Szepesi, D.* (1972): A területi forrás általánosított modellje (Verallgemeinertes Modell der Flächenquelle). Időjárás, Jahrg. 76, No. 1—2, pp. 73—78.
- [4] *Van der Hoven, J.* (1968): Deposition of Particles and Gases. Meteorology and Atomic Energy, pp. 204.
- [5] *Wojciechowski, K.* (1971): The Deposition of Dust Particles from Elevated Sources. Atmospheric Environment, Vol. 5, No. 1. pp. 41—48.